MÉTODOS VARIACIONAIS EM GEOMETRIA

Liana Mara Ferreira Martins (bolsista do PIBIC/CNPq), Paulo Alexandre Araújo Sousa (Orientador, Departamento de Matemática - UFPI)

1 Introdução

O cálculo das variações é uma área da matemática que consiste em buscar máximos e mínimos (ou, mais geralmente, extremos relativos) de funções contínuas definidas sobre algum espaço de funções. Constitue uma generalização do cálculo elementar de máximos e mínimos de funções reais de uma variável. Funcionais podem, por exemplo, ser formados por integrais envolvendo uma função incógnita e suas derivadas. O interesse está em funções extremas - aquelas que fazem o funcional atingir um valor máximo ou mínimo - ou de funções fixas - aquelas onde a taxa de variação do funcional é precisamente zero.

2 Metodologia

O desenvolvimento das atividades deu-se com a aluna estudando a teoria envolvida em artigos e livros das áreas de geometria e de cálculo das variações. Ocorreram encontros semanais, com o intuito de aprofundamento teórico e aprendizado de técnicas que auxiliaram na resolução dos problemas geométricos propostos, em que a bolsista fez exposições do que pesquisou e foi arguida sobre os temas estudados. A Internet foi usada para a pesquisa de trabalhos desenvolvidos em grandes centros de pesquisa.

Dentre as técnicas de cálculos das variações que foram estudadas, para resolvermos problemas geométricos, destacamos:

- equações de Euler-Lagrange: equações de segunda ordem que fornecem condições necessárias para minimização de um dado funcional;
- equações de Hamilton: equações de primeira ordem equivalentes às equações de Euler-Lagrange;
- ingredientes básicos para utilização de métodos topológicos (tipo minimax) para minimização de funcionais.

3 Resultados e Discussão

Neste trabalho foi feito um estudo minucioso de algumas técnicas de cálculo das variações, dentre as quais destacamos as Equações de Euler-Lagrange:

Lema 1 (Euler-Lagrange). *Seja* $y \in \mathcal{A}_{(A,B)} = \{y : [0,1] \to \mathbb{R} : y \in \mathcal{C}^1,\ y(0) = A$ *e* $y(1) = B\}$ *um extremo para o funcional* $\mathcal{J}(y)$. *Então* y *satisfaz a equação de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dx}\mathcal{L}_{y'} = \mathcal{L}_y\,,$$

onde $\mathcal{L}$ *denota a Lagrangiana de* $\mathcal{J}$.

Posteriormente, as técnicas estudadas foram aplicadas na resolução de alguns problemas geométricos, por exemplo:

Problema 1 (Superfície de revolução de área mínima). *Considere o conjunto* $\mathcal{A}_{(A,B)} = \{\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : \alpha \in \mathcal{C}^1,\ \alpha(0) = A$ *e* $\alpha(1) = B\}$. *Dada uma* $y = y(x) \in \mathcal{A}_{(A,B)}$ *que não intersecta o eixo* x, *ou seja* $y(x) > 0$, *denotaremos por* S^2 *a superfície gerada pela rotação da curva* $y = y(x)$ *em torno do eixo* x *de um ângulo de* 2π. *Qual de tais curvas gera a superfície que possui área mínima ?*

Apoio: UFPI, CNPq.

Palavras-Chave: Equações de Euler-Lagrange, Superfície Mínima.

Referências

[1] Alencar, H. e Walcy, S. - *Geometria das Curvas Planas.* XV Escola de Geometria Diferencial, 2008.

[2] do Carmo, M.P. - *Geometria das Curvas e Superfícies.* Textos Universitários - SBM, 2005.

[3] Gelfand, I.M. and Fomin, S.V. - *Calculus of Variations.* Editora Dover, 2000.

[4] Guggenheimer, H.W. - *Differential Geometry.* Editora Dover, 2007.

[5] Lima, E.L. - *Curso de Análise Vol. 2.* Projeto Euclides - IMPA, 2004.

[6] Tenenblat, K. - *Introdução à Geometria Diferencial.* Editora Blucher, 2008.

[7] Weinstock, R. - *Calculus of Variations.* Editora Dover, 2006.